

# Introduction à la didactique des mathématiques

Depuis la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, l'Union mondiale des mathématiciens préparait une grande réforme de l'enseignement des mathématiques basée sur une réorganisation radicale des mathématiques elles-mêmes\*. À partir des années 1960, l'explosion des connaissances venues d'autres domaines comme la psychologie, la linguistique, l'épistémologie, l'éducation *etc.*, faisait douter de la capacité des pratiques scolaires classiques à réaliser seules la mutation désirée. Il fallait donc que les mathématiciens, d'une part, investissent ces champs nouveaux et, d'autre part, puissent insérer leurs tentatives dans une démarche expérimentale à court terme afin de suivre et de corriger si possible les effets des mesures tentées.

\* Voir le dossier réuni par Michèle Artigue et Hélène Gispert « Cent ans de réformes de l'enseignement des mathématiques » : <http://www.dma.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/ICMI/reformes.htm>.

Guy Brousseau est professeur honoraire (université de Bordeaux). Il a obtenu le Félix Klein Award 2003 de l'ICMI.

Gérard Vergnaud est directeur de recherche émérite au CNRS.

Félix Klein, président de la Commission internationale sur l'instruction mathématique (ICMI), souhaitait en 1908, rapprocher les mathématiques enseignées et les activités des élèves de celles usitées par les mathématiciens eux-mêmes et par l'industrie afin d'améliorer leur adaptation aux demandes de la société. Les moyens envisagés à l'époque étaient principalement des enquêtes d'experts et des expérimentations, complétées par la connaissance et l'usage de la psychologie par les professeurs.

## Création des IREM

Il faudra attendre la fin des années 1960 pour qu'en France les IREM soient créés. Mathématiciens et enseignants cherchent alors à s'informer et à préparer les décisions futures en élaborant les instruments nécessaires. Au vu des travaux accomplis entre 1965 et 1975, la voie de la recherche théorique et expérimentale est reconnue par la création d'un DEA de « didactique des mathématiques » délivré par les mathématiciens à des mathématiciens qui font des études doctorales centrées sur l'enseignement des mathématiques, quelles que soient les sciences dont ils pourraient s'aider. Aujourd'hui – sans analyse sérieuse – la tenta-

tive appelée « mathématiques modernes » est considérée par le public comme un échec retentissant ; les évaluations de masse ne montrent aucun progrès d'ensemble depuis leur banalisation dans les années 1990 et leur usage inconsidéré provoque au contraire une régression spectaculaire des pratiques et des résultats. Les apports de la psychologie affluent, mais malgré leur qualité ils apparaissent toujours comme des critiques des élèves ou des professeurs. En l'absence de connaissances fondamentales sur les processus didactiques, ils ne peuvent pas produire de solutions et ne peuvent pas prévoir les effets de celles qu'ils inspirent.

## La didactique actuelle

La *didactique actuelle* est née à la fois de ces mouvements de réformes et de leurs difficultés. Contrairement à l'ancienne didactique basée sur les principes de Comenius et constituée de prescriptions, elle cherche à comprendre l'enseignement sur des bases expérimentales et théoriques, non à lui donner des conseils et encore moins des normes.

C'est l'école primaire, qui, en s'impliquant d'emblée dans la réforme, de façon inattendue mais légitime, a offert à la recherche fondamentale un appui et des opportunités décisives.

Elle présentait un champ plus riche en types d'évènements, notamment sur des points fondamentaux d'épistémologie et de didactique et de meilleures possibilités d'expérimentation. La création du Centre d'observation de l'enseignement des mathématiques (COREM 1973-1999) a joué un rôle essentiel. J'y ai trouvé des ressources plus concentrées, des motivations sociales plus puissantes et un personnel plus disposé et plus libre. Les phénomènes didactiques y étaient plus visibles. Les résultats obtenus dans ces observations, malgré la complexité des conditions à gérer, ont permis d'ériger les bases d'une science de la diffusion des connaissances mathématiques. Les niveaux secondaires et supérieurs ont été plus longs à investir, mais ils le sont aujourd'hui.

G. B.

## La Didactique

L'éducation mathématique est un chantier mondial déjà ancien, un champ de travaux et de recherches scientifiques de toutes sortes. Celles qui relèvent de la *Psychologie de l'éducation mathématique* (PEM) sont bien connues.

La didactique – terme accepté dans de nombreux pays – étudie les faits spécifiques à la diffusion et à l'apprentissage des connaissances mathématiques, qui ne sont pas réductibles à la réunion de sciences plus classiques. Quelques théories essaient de les unifier en une science. L'enseignement est aujourd'hui le jouet d'une culture et d'idéologies qui ont la faveur du public mais qui tendent à écraser les pratiques des professeurs. Appliquer l'*obligation de résultats* à l'enseignement est une exigence infondée. L'*obligation de moyens* suppose l'existence de protocoles, soit fixes et assumés par la société, soit évolutifs mais alors déterminés par des recherches scientifiques comme en médecine. L'émergence d'une science « du didactique » est indispensable.

G. B.

## Le court terme et le long terme de l'apprentissage des mathématiques

Pourquoi et comment la psychologie est-elle intéressée par la didactique des mathématiques ? Retenons seulement deux idées dans le présent texte, celle d'*activité* et celle de *développement*.

Le **court terme de l'apprentissage** est bien cerné aujourd'hui par les concepts de situation et de schème : situation parce que c'est en mettant en scène les connaissances mathématiques, dans des situations choisies à cet effet, que l'on peut espérer entraîner les élèves dans un questionnement et un apprentissage productifs. Schème parce que l'activité des élèves en situation est organisée par les schèmes dont disposent les élèves, quitte pour eux à devoir les enrichir par l'adaptation aux situations nouvelles ainsi rencontrées.

Le concept d'algorithme est évidemment très important, mais les élèves mobilisent des ressources qui vont bien au-delà des algorithmes qu'ils ont appris auparavant. Les recherches montrent justement que les élèves improvisent des manières de faire qui sont pour une part erronées, et pour une part rationnelles sans être pour autant algorithmiques. L'activité en situation appelle donc l'analyse des schèmes, qui sont ainsi des formes d'organisation de l'activité : prises d'information, anticipations, actions, contrôles, inférences. On peut alors identifier dans les schèmes des conceptualisations qui méritent évidemment l'attention des chercheurs : ce sont des points d'appui pour le maître, en même temps que des obstacles qu'il faut aider les élèves à surmonter.

Souvent ceux-ci mettent en œuvre des théorèmes en acte pertinents, au moins partiellement, sans être pour autant en mesure de les expliciter. Il faut donc une certaine sagacité pour les découvrir sous l'activité observable des élèves.

Le **long terme de l'apprentissage** implique évidemment des processus complémentaires de celui de l'apprentissage en classe. Le développement cognitif des enfants, dans la durée (et cela n'est pas vrai seulement pour les enfants), s'appuie sur toute l'expérience scolaire et extrascolaire. Il est donc important d'avoir une vision relativement large des situations dans lesquelles les élèves construisent, avec l'aide des maîtres et avec d'autres soutiens, le système de concepts qui leur permet

de comprendre progressivement une variété relativement grande de situations et de raisonnements. Ce système s'appuie évidemment sur des connaissances mathématiques explicites, mais aussi sur les situations rencontrées et les raisonnements parfois peu conscients alors mis en œuvre. C'est ce que recouvre l'idée de champ conceptuel, que l'on peut définir à la fois comme un ensemble de situations et un ensemble de concepts. En outre, comme les concepts formés au cours de l'expérience mathématique ne sont pas tous explicites par les élèves, il faut faire une place dans ce développement aux invariants opératoires (concepts et théorèmes en acte) sur lesquels repose en dernier ressort l'organisation de l'activité. Par exemple le champ conceptuel des structures additives irrigue l'analyse des connaissances progressivement maîtrisées par les élèves depuis la fin de l'école maternelle jusqu'à la fin du collège, y compris la transition délicate entre l'arithmétique et l'algèbre. Certaines difficultés durables rencontrées par les élèves, comme celles concernant les nombres négatifs et l'interprétation de la solution négative d'une équation, s'expliquent par des idées formées au cours de l'expérience antérieure des élèves, parfois très tôt au cours du développement.

En résumé, l'attention sourcilieuse portée au court terme de l'apprentissage conduit le chercheur à s'intéresser à l'activité en situation et à son analyse. Les outils existent, même s'ils ne sont pas d'un usage répandu. Celle portée au long terme de l'apprentissage conduit à regarder le développement comme un objet important de la recherche en didactique, qui est traversé par des filiations et des ruptures, dont les enseignants et les auteurs de programmes ne sont que partiellement conscients. Dans cette problématique, l'épistémologie de l'apprentissage des mathématiques, en s'appuyant sur la psychologie du développement et sur l'analyse de l'activité des élèves, apparaît à la fois parente et distincte de l'épistémologie des mathématiques. La raison en est simple : les problèmes auxquels s'adressent les enfants ne sont pas exactement les mêmes que ceux auxquels se sont adressés les mathématiciens au cours de l'histoire.

Gérard Vergnaud