par Didier Nordon

Qu'est-ce qu'un exemple ?

La meilleure façon de se familiariser avec une idée mathématique est d'examiner divers exemples de cas où elle s'applique. Cependant, la notion d'exemple est moins simple qu'il n'y paraît. Elle mérite qu'on s'y attarde.

La nuit, tous les chats sont gris. Exemple :

Imaginons quelqu'un qui ignorerait le sens du mot « exemple ». Pour l'aider à comprendre ce mot, pourra-t-on lui montrer... un exemple d'exemple ?! Non. Il n'existe rien qui, par nature, soit un exemple. Etre un exemple n'est pas une spécificité attachée à certains objets et pas à d'autres. La notion d'exemple est abstraite, car le fait d'être ou non un exemple est second : il faut d'abord une idée générale. Ensuite seulement, vient un objet qui l'illustre (exemple) ou la réfute (contre-exemple). Un même objet sera exemple pour une théorie, contre-exemple pour une autre, sans relation avec une troisième... La notion d'exemple est si informe qu'il n'en existe pas d'exemple ! Ou, ce qui revient au même, tout peut, selon les circonstances, être un exemple.

Un pas vers le concret, un pas vers l'abstrait

Regarder un objet en tant qu'exemple, c'est le considérer d'un point de vue plus abstrait qu'il n'est, car cela exige d'avoir à l'esprit la théorie générale qu'il illustre. Ainsi, les nombres 29 ou 45 gagnent en abstraction si on observe que ce sont des exemples d'entiers égaux à la somme de deux carrés ($25 + 4$; $36 + 9$). Pareille remarque ne prend son sens plein, en effet, que mise en rapport avec le théorème de Lagrange (voir l'encadré ci-contre), lequel exige, pour être compris, une familiarité avec l'abstraction mathématique. Inversement, une façon de rendre concret ce théorème est de le tester sur 29, sur 45, sur d'autres entiers.
Que beaucoup de théories naissent d'observations ne signifie pas que l'exemple préexiste à la théorie. Les objets qui ont suscité telle ou telle idée ne sont devenus exemples qu'une fois l'idée exprimée. On peut rencontrer, de nuit, des chats tous gris, ils sont a priori des occurrences d'éléments entre lesquels on ne fait pas de lien. Une fois formulée une proposition générale (« La nuit, tous les chats sont gris »), ils se transforment en exemples la confirmant.

Le théorème de Lagrange

En 1770, Lagrange (1736-1813) a démontré que tout entier positif est somme d'au plus quatre carrés.
Il peut suffire de deux carrés. Ainsi, $29 = 25 + 4$; $45 = 36 + 9$. Un entier est somme de deux carrés si et seulement si, dans sa décomposition en facteurs premiers, tous les facteurs premiers congrus à 3 modulo 4 apparaissent à une puissance paire.
Le nombre 7 ne peut pas être décomposé en une somme de moins de quatre carrés :

$$7 = 4 + 1 + 1 + 1.$$

Pour qu'un entier soit somme d'au plus trois carrés, il faut et il suffit qu'il ne soit pas de la forme $4a\,(8m + 7)$, où a et m sont des entiers.

Humaines, donc confuses

Des philosophes ont vu dans les mathématiques la méthode hypothético-déductive réalisée dans une pureté de cristal. Des psychanalystes ont cru se doter d'une rigueur à toute épreuve grâce aux structures mathématiques. La voix publique prend les mathématiques pour un lieu de vérités absolues, jamais réévaluées. Ces images, trop normatives, sont simplistes. Les mathématiques manient tant d'autres choses que la rigueur, l'hypothético-déductif, les structures ou la vérité ! Elles hébergent des

Références :
• Pierre Cartier et Karine Chemla, ***La création des noms mathématiques: l'exemple de Bourbaki***, in ***La Dénomination***, Odile Jacob, coll. ***Le Temps des savoirs, n°1, 2000, pp. 153- 170.***
• Pierre Deligne, *Les immeubles des groupes de tresses généralisés*, Inventiones math. 17, 273-302, 1972.
• Didier Nordon, ***Les mathématiques pures n'existent pas!***, Actes Sud (rééd.), 1993 ; ***Deux et deux font-ils quatre ? Sur la fragilité des mathématiques***, Belin - ***Pour la science***, 1999.

conceptions inconciliables, évoluent de façon imprévisible, sont condamnées à toujours repenser. Aucun point de vue n'y est acquis à jamais. C'est une fragilité, mais aussi une richesse.
Les mathématiques sont une pratique. Leur but : s'orienter dans un réel qui, là comme partout, est un fouillis. Une part du travail consiste à observer des faits et à imaginer des théories les expliquant. Devenus exemples d'une théorie, les faits prennent un sens nouveau. Au cours du temps, les procédés changent. Jusqu'au XIX^{e} siècle, on pouvait exposer une méthode générale sans démontrer sa validité, en se limitant à la faire agir sur un exemple. Cela, pour l'instant, n'est plus admis.

Un mur n'est pas un exemple de mur

La notion d'exemple est compliquée par le fait que les mathématiques utilisent beaucoup de mots usuels auxquels elles assignent un sens savant (voir l'encadré à droite). Parfois, mais c'est rare, le sens savant vise à exprimer l'essence de la notion usuelle, à cerner l'idée générale qui lui est sous-jacente. Il en va ainsi avec le mot «droite». Quoique des exigences propres aux mathématiques aient peu à peu détaché la notion mathématique de la notion usuelle, interpréter une droite usuelle comme un exemple grossier de droite mathématique n'est pas abusif. La situation est tout autre dans les lignes que voici, extraites de «Les immeubles des groupes de tresses généralisés», article de Pierre Deligne : « Soit M un mur d'une chambre B. Il existe une et une seule chambre B', mitoyenne à B, ayant M pour mur. M est le seul mur qui sépare B de B' ». Croire que ce texte théorise l'exemple d'un mur de maçon serait mal le comprendre ! Les termes employés par Deligne désignent des objets, introduits au XX^{e} siècle, dont le rôle n'est pas de cerner l'essence des objets usuels du même nom. La preuve : ils ont initialement porté d'autres noms («squelette», «cimetière», « ossuaire »). Eussent-elles filé la métaphore macabre plutôt que l'immobilière, la face des mathématiques eût été changée...
L'emploi du mot «mur» n'exprime pas la tentative de mathématiser la notion de mur. Le mot n'a pas pour autant été pris au hasard. Son choix obéit à un processus classique : le glissement de sens. A force de se familiariser avec eux, les mathématiciens se font des images des objets mathématiques. Cela leur permet de les rattacher au monde concret. Ils aiment alors leur donner pour noms les mots désignant ce concret. Peut-être éprouvent-ils un brin de joie perverse à s'emparer de mots que tout le monde connaît, afin de leur attribuer des sens qu'eux seuls comprennent. Plus abstrait un domaine, plus grande l'habileté de ses spécialistes à trouver une ressemblance, parfois subtile ou même comique, entre les objets qu'ils manient et des objets courants (voir l'encadré ci-dessus). Attentifs au langage, les mathématiciens sont habiles à s'en servir comme d'un lien avec le monde, voire un garant pour ne pas dériver vers un excès d'abstraction. Ce talent a sa contrepartie: il a pu faire prendre pour pertinentes des recherches consistant à développer un formalisme vide, mais présenté à l'aide de mots familiers. Mots trompeurs parce que trop rassurants. Ce travers fut fréquent dans les années 1960-1980 chez des chercheurs dont les travaux, disait-on, étaient si généraux qu'ils ne contenaient aucun cas particulier !
Se fier aux mots ou s'en défier ? Percevoir l'allusion justifiant l'emploi de tel mot usuel pour désigner telle notion savante aide à mémoriser la notion. Pourtant, la notion savante est autre. Elle n'est pas une généralisation de la notion usuelle ; la notion usuelle n'est pas un exemple de la notion savante. L'élève doit apprendre à se détacher du sens usuel et des déductions spontanées qu'il induit. Il ne doit plus se laisser influencer par le sens usuel. Quand la presse annonce que telle courbe connaît une croissance continue depuis telle date, elle ne réfère pas à la continuité mathématique.
Même quand la notion savante modélise une notion usuelle, il faut les distinguer. Lors de l'apprentissage des probabilités, se déprendre du sens courant de l'expression « événements indépendants » est indispensable, parce que l'intuition est souvent contredite par le calcul. Un élève qui, au lieu de faire les vérifications imposées par la théorie, affirme l'indépendance de deux événements en disant : « Ils sont indépendants, puisqu'ils n'ont rien à voir », cet élève n'a pas réussi à faire le départ entre perception courante et démonstration rigoureuse. Un modèle ne coïncide pas avec la réalité qu'il décrit. Il est néanmoins plus assuré que la perception pour avoir prise sur la réalité. Si la perception suffisait, il n'y aurait pas besoin de modèle.

D.N.

Les surprises de la terminologie

La terminologie introduite par Bourbaki (groupe de mathématiciens actif dans les années 1930-1980) n'est pas sans humour. Bourbaki définit un tonneau comme un ensemble convexe, absorbant, fermé et équilibré - adjectifs qui ont tous un sens fort savant. Leurs initiales forment le mot «café», ce qui aide à les retenir. Un tonneau des chevaliers de la Table ronde n'est pas plus un exemple de tonneau de Bourbaki qu'un créneau effectué entre deux voitures n'est un exemple de créneau de château fort. Cependant, créneau ou tonneau, les dérivations de sens sont faciles à retracer pour qui sait de quoi il s'agit.

Voici, parmi cent autres, des mots usuels employés en mathématiques avec un sens savant.
Substantifs : ***action, anneau, application, arbre, catégorie, cellule, corps, ensemble, extension, faisceau, fibre, filtre, germe, groupe, intérieur, jet, lanterne, peigne, radical, ramification, réseau, résidu, revêtement, série, slalom, suite, tige, union, variété, voisinage...***
Adjectifs : ***abondant, absolu, adhérent, bon, clos, cohérent, commode, compact, discret, épais, fin, flasque, grossier, inerte, lisse, maigre, modéré, ouvert, premier, pur, robuste, sauvage, uniforme, vague...***
Verbes : ***absorber, composer, contracter, décomposer, déployer, dériver, dominer, éclater, effondrer, forcer, injecter, normaliser, opérer, plonger, rectifier, relever, spécialiser...***