par Didier Nordon

Les mathématiques, art de généraliser

Leur réputation d'abstraction, les mathématiques la doivent, entre autres, à l'impression que provoque un de leurs gestes typiques : la recherche de la généralité. Beaucoup de gens confondent cette recherche avec une volonté d'abstraction pour l'abstraction. Or c'est loin d'être toujours le cas. Pour qui les pratique, l'abstraction n'est pas ce que les mathématiques ont de plus marquant.

Généraliser est souvent un moyen de mieux comprendre ...

La recherche de la généralité prend diverses formes : mettre en évidence une structure commune à des situations apparemment sans rapport ; voir si un théorème démontré sous certaines hypothèses peut l'être sous des hypothèses moins fortes ; tenter d'interpréter un résultat comme cas particulier d'un autre résultat ayant un domaine d'application plus vaste ; etc. La volonté de généraliser a une raison technique : obtenir un résultat susceptible de servir dans le plus possible de situations. Elle a aussi une raison intellectuelle. Généraliser est souvent un moyen de mieux comprendre et de s'assurer que la démonstration qu'on a donnée est adéquate. En effet, obtenir le résultat le plus général signifie qu'on s'est débarrassé de toutes les hypothèses que, pendant un temps mais à tort, on a cru nécessaires.

Quand le résultat est parfaitement général, c'est qu'on est arrivé au coeur du problème ...

Démontrer et comprendre

Quand le résultat est parfaitement général, c'est qu'on est arrivé au cœur du problème ; on a cerné les conditions *sine qua non* permettant de tenir le raisonnement, et écarté les circonstances secondaires présentes dans tel ou tel cas particulier. Chose curieuse, généraliser un résultat est une façon de le préciser. Par exemple, «les bissectrices de tout triangle sont concourantes» est un énoncé plus général et plus précis que «les bissectrices de tout triangle équilatéral sont concourantes». Le second énoncé est plus facile à démontrer, mais il peut faire croire que l'hypothèse «équilatéral» est nécessaire. Parfois, même, généraliser une question posée permet d'apporter une réponse qu'on ne trouvait pas tant qu'on s'en tenait à la question initiale. Certaines démonstrations consistent à introduire un paramètre, puis à prouver un résultat valable quand ce paramètre varie, et à observer enfin que le problème initial correspond à une valeur particulière du paramètre.

Comment un mathématicien s'assure-t-il qu'il a atteint au maximum de généralité ? En recourant à des contre-exemples. «Le résultat est vrai sous telles conditions. Ces dernières sont les moins restrictives possibles, puisque si on en supprime une, le résultat tombe, comme le montre le contre-exemple suivant...». Mais il arrive qu'il ignore si son résultat est le plus général possible. Nombre d'articles s'achèvent sur des phrases comme : «On peut se demander si le résultat reste vrai dans le cas plus général où telle hypothèse est remplacée par telle autre».

Il semblera étonnant qu'un mathématicien puisse ne pas savoir s'il a atteint le maximum de généralité, manifestant là son incapacité à distinguer entre les hypothèses essentielles et celles qui lui ont facilité la tâche, mais dont il devrait parvenir à se passer grâce à une démonstration plus puissante. C'est que l'idéal d'une démonstration est rarement réalisé, cet idéal étant qu'elle soit en même temps une explication : prouver qu'un résultat est vrai tout en faisant comprendre pourquoi il l'est. Là, le mathématicien maîtrise la situation, discerne les limites du résultat. En pratique, bien des raisonnements sont probants mais peu éclairants, donc ne permettent pas de distinguer l'essentiel de l'accessoire. Le pire se produit quand une situation générale est la collection d'un certain nombre de cas particuliers. Les démonstrations obtenues en vérifiant sur chaque cas l'exactitude du résultat ne font pas percevoir la vérité profonde qui gît sous le résultat et l'explique, le rend nécessaire (voir l'encadré ci-contre).

Définir et généraliser

La généralisation joue aussi dans l'activité de définition. Il faut définir des objets assez précis pour être manipulables, mais assez généraux pour être utiles dans des cas variés. Quelles propriétés circonscrivent leur essence, lesquelles ne sont que secondaires ? Ce problème est rarement résolu de façon définitive, car ce qui paraît essentiel, général, dans une optique peut paraître secondaire dans une autre. Le point de vue se modifie au fil des époques, donc les caractérisations retenues changent.
Ainsi, la notion de nombre ne cesse d'évoluer . Depuis les entiers et les rationnels positifs, une généralisation croissante a mené aux réels et aux complexes. Ces nombres ont choqué lorsqu'ils se sont imposés dans des calculs, comme en témoignent les noms qui leur ont été donnés : irrationnels, absurdes, irréguliers, inexplicables, sourds, impossibles, fausses racines... Mais ils ne répondaient pas à un pur désir d'aller vers l'abstrait : ils servaient à résoudre des problèmes. Désormais, les généralisations de la notion de nombre ne causent plus d'émoi. Il en existe d'autres types (nombres *p*-adiques, quaternions, éléments des corps finis, transfinis de Cantor , etc.), obtenus non par extension à partir des entiers, mais plutôt par glissement du sens du mot « nombre ».
Mais alors, quand un nouvel objet s'introduit, quel critère permet de décider s'il fait ou non partie de la famille des nombres ? La réponse à cette question est que peu de mathématiciens se la posent ! Ils ne cherchent pas de critère caractérisant ce qui, parmi les objets mathématiques, est nombre. Sans théoriser de définition, ils se satisfont de leur savoir-faire et de l'intuition qu'il a développée en eux. L'intuition étant personnelle, tel mathématicien pourra percevoir comme un nombre quelque objet que ses collègues ne perçoivent pas ainsi. La question a peu d'enjeu, donc n'induit pas de polémique. L'essentiel est de s'accorder sur la façon de s'en servir. De la part des mathématiciens, est-ce démission intellectuelle ? Est-ce sagesse, le nombre étant un objet primitif qu'il est vain de chercher à définir ? En tout cas, multiplier les extensions du sens du mot « nombre » leur permet de résoudre des problèmes, mais pas de cerner le concept, qui reste confus. A l'inverse, lorsque des philosophes cherchent à cerner le concept, les mathématiciens n'ont pas l'impression que cela offre de nouveaux moyens pour aborder leurs problèmes.

D.N.

Exemples ou définition ?

Pour faire acquérir aux élèves des notions abstraites dont la raison d'être ne leur apparaît pas encore, vaut-il mieux multiplier les exemples préalables ou asséner d'office la définition ?
Commencer par des exemples a un défaut : donner des exemples d'une abstraction sans l'avoir énoncée en rajoute dans l'abstraction, présentée comme une espèce de devinette. Souvent, donc, l'enseignant « parachute » la définition, en déduit des conséquences, puis la motive sur des exemples. Il ne met pas les élèves en situation de recherche, car l'enseignement ne peut pas aller aussi lentement que la recherche, condamnée à explorer beaucoup de pistes vaines.
Parachuter les définitions avant les exemples est défendable. Que les élèves aient confiance, et acceptent que quelques minutes s'écoulent avant qu'ils saisissent la richesse des définitions qu'on leur impose. A charge pour l'enseignant de ne pas se complaire dans l'abstraction, d'expliquer le plus tôt possible en quoi les notions qu'il introduit éclairent d'un jour nouveau les objets déjà connus et permettent de faire connaissance avec d'autres.

Il faut définir des objets assez précis pour être manipulables, mais assez généraux pour être utiles dans des cas variés...