

Ramanujan et la méthode de balayage

Le problème

On cherche tous les entiers positifs p et q tels que : $p^3 + q^3 = 1\,729$.

Une méthode consiste à faire tous les essais possibles en remplaçant p et q par toutes les valeurs entières d'un ensemble bien délimité.

On appelle cette méthode la « méthode de balayage ».

Limitation de l'ensemble des solutions

Si un couple $(p ; q)$ est solution de l'équation, chacun des deux entiers p et q a un cube qui ne peut pas dépasser $1\,729$; or, on vérifie que $12^3 = 1\,728$.

Chacun de ces nombres est donc inférieur ou égal à 12 .

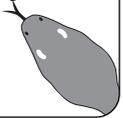
Complément culturel

Le mathématicien Srinivasa Ramanujan (1887–1920) est considéré comme l'un des plus grands spécialistes en théorie des nombres du XX^e siècle. On lui attribue le résultat suivant :

« *L'entier 1 729 est le plus petit entier naturel à pouvoir se décomposer en somme de deux cubes de deux façons différentes.* »

Les programmes

Python



La syntaxe diffère légèrement entre les trois langages.

Principales instructions de Python :

- on écrit `==` pour tester une égalité ;
- la séquence « `while p!=13` » signifie « tant que p est différent de 13 ».

le programme

```
>>> def recherche():
    p=0
    while p!=13:
        q=0
        while q!=13:
            if p**3+q**3==1729:
                print(p, q)
            q=q+1
        p=p+1
```

le résultat

```
>>> recherche()
1 12
9 10
10 9
12 1
```

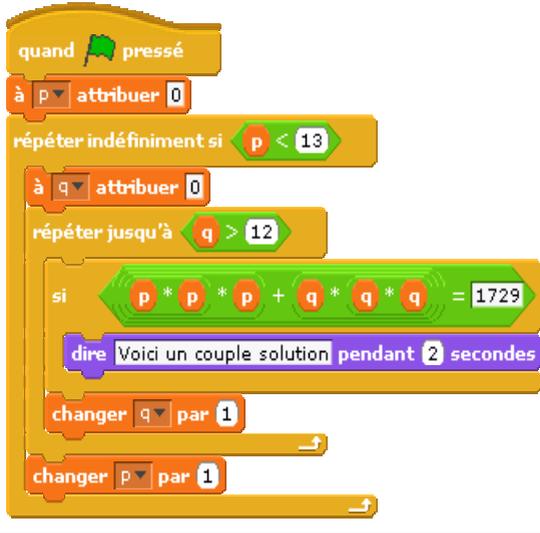
On apprécie la rapidité d'exécution du programme : les deux couples solutions (et leurs symétriques) sont donnés *illico presto*.

SCRATCH



Scratch

On part de $p = 0$, on fait l'essai de l'égalité pour q variant de 0 à 12. On ajoute 1 à p , on effectue à nouveau les essais de $q = 0$ jusqu'à $q = 12$. On continue le même processus jusqu'à $p = 12$.



Prolongement

Le célèbre mathématicien suisse Leonhard Euler (1707–1783) a affirmé : « 635 318 657 est la plus petit entier pouvant s'écrire de deux façons sous la forme d'une somme de deux puissances quatrièmes d'entiers. »

Quelles sont ces deux écritures ?

Solution (Python) : On veut résoudre l'équation $p^4 + q^4 = 635\,318\,657$ où p et q sont entiers. On restreint la plage de recherche des solutions à $[0 ; 160[\times [0 ; 160[$.

Les entiers p et q jouant des rôles symétriques, on recherche les couples $(p ; q)$ avec $q \leq p$.

le programme

```

>>> def euler():
    p=0
    while p!=160:
        q=0
        while q<=p:
            if p**4+q**4==635318657:
                print(p,q)
            q=q+1
        p=p+1
  
```

le résultat

```

>>> euler()
134 133
158 59
  
```



AlgoBox

Dans le programme AlgoBox, il est nécessaire de définir au préalable les variables p et q . Pour l'affichage de la réponse, on prendra soin d'ajouter des espaces, afin que la réponse fournie par l'ordinateur soit lisible.

VARIABLES

```

p EST_DU_TYPE NOMBRE
q EST_DU_TYPE NOMBRE
  
```

DEBUT_ALGORITHME

```

p PREND_LA_VALEUR 0
TANT_QUE (p<13) FAIRE
  DEBUT_TANT_QUE
  q PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (q<13) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    SI (p**p+p**q**q==1729) ALORS
      DEBUT_SI
      AFFICHER "On a un couple solut
      AFFICHER "p="
      AFFICHER p
      AFFICHER " et q="
      AFFICHER q
      AFFICHER " "
      FIN_SI
    q PREND_LA_VALEUR q+1
  FIN_TANT_QUE
  p PREND_LA_VALEUR p+1
FIN_TANT_QUE
  
```

FIN_ALGORITHME