Par Jean-Louis Legrand

Créer des problèmes pour les compétitions

Une compétition de jeux mathématiques et logiques vise un public assez large et parfois international. Les énoncés sont formulés en langage courant. Pour les candidats les plus jeunes, les problèmes doivent être répartis en catégories tenant compte des programmes scolaires. Pour les candidats plus âgés, ils peuvent faire appel à des connaissances plus pointues.

Jean-Louis Legrand est membre du jury de la Fédération française des jeux mathématiques.

Comment les idées viennent-elles pour créer de nouveaux problèmes ?

D'abord, il convient de se référer aux *ouvrages fondamentaux* sur les divertissements mathématiques, historiques ou récents, et aux *recueils* des principales compétitions. Il convient également de visiter sur Internet les sites dédiés aux récréations mathématiques, y compris en anglais. Il ne s'agit pas de copier un problème déjà posé, mais de s'en inspirer pour en développer une variante. On utilise un même concept pour créer différents problèmes.
Ensuite, il convient d'appréhender, au travers de livres et de revues, certaines théories mathématiques, puis d'en rechercher des applications relativement simples.

Enfin, *l'observation* autour de soi doit être stimulée au quotidien. Elle peut suggérer de bonnes idées. Le problème 1 sur la pyramide du Louvre fournit un exemple réel (voir l'encadré).

Qu'est-ce qu'un bon problème ?

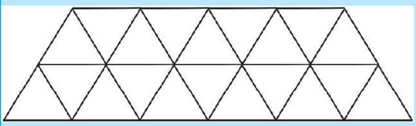
Un « bon problème » doit se différencier d'un exercice de mathématiques. Il ne doit pas donner prise à une méthode d'attaque prédéfinie, mais proposer un *défi* à relever. Il doit surprendre un peu. Le candidat ne doit pas être trop guidé, mais faire un peu de recherche et trouver un algorithme simple. Les compétitions autorisant plusieurs solutions pour un seul problème sont intéressantes à cet égard.

Tout en étant placé dans la vie courante, un « bon problème » doit présenter un caractère *original*. Autant que faire se peut, l'énoncé doit être rédigé de façon *amusante*, ce qui n'est pas le plus difficile. Cela peut être fait à la fin du processus, lorsque l'idée est mature.
Le créateur de problèmes ne doit pas être isolé. Il est nécessaire et utile que tout problème soit soumis à un *jury*, qui en évalue le fond et la forme.

Comment classifier les problèmes ?

Il est assez difficile de classifier les problèmes car plusieurs théories mathématiques peuvent être appliquées *simultanément* : ensembles, logique, arithmétique, combinatoire, géométrie, topologie, probabilités, graphes, algèbre, *etc.*

Problème 1 (finale régionale du 21e Championnat)



Les panneaux vitrés de la pyramide du Louvre sont soit des petits triangles équilatéraux, tous identiques, soit des losanges constitués de deux de ces triangles. Le nombre de losanges est maximal. La pyramide est à base carrée. Ses quatre faces extérieures sont des grands triangles équilatéraux complétement vitrés à l'exception d'une ouverture, en bas et au milieu d'un côté, qui revêt la forme de la figure. Quel est le nombre total de panneaux vitrés de la pyramide, sachant qu'il est le plus proche possible du nombre du diable, 666 ?

Il convient surtout d'avoir une vision consolidée de tous les problèmes d'une même épreuve afin d'en assurer la *variété*. En particulier, il est souhaitable de ne pas recourir deux fois au même basique : figure magique avec des nombres, grille à remplir en fonction d'indices, cryptarithme, opération codée, pièces de monnaie, pesées, permutations, organisation, traversées, jeu de société, dominos, dés, allumettes, coloriage, découpage, polyminos, parcours, labyrinthe, automate cellulaire, *etc.*

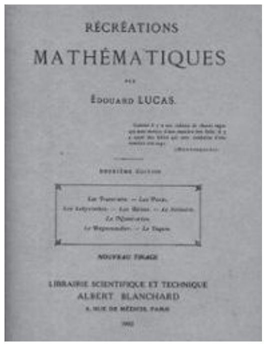
Des contextes variés

L'exemple du principe des tiroirs va être développé, par ordre croissant de difficulté. La première version en fut énoncée par Dirichlet en 1834, suite (semble-t-il) à l'observation de ses chaussettes dans sa commode : si C chaussettes occupent T tiroirs d'une commode, et si C > T, alors au moins un tiroir doit contenir plus d'une chaussette. En anglais (« pigeonhole »), le même principe fait allusion à la répartition de pigeons dans les boulins d'un pigeonnier.
Le problème 2 fournit un exemple d'une version plus générale au niveau élémentaire.

Problème 2 (finale internationale du 26e Championnat)

À l'occasion de la Finale internationale des jeux mathématiques et logiques, les quinze concurrents étrangers de la catégorie CE en ont profité pour faire des excursions dans Paris. Quatorze ont visité la Tour Eiffel, treize l'avenue des Champs-Élysées, douze le musée du Louvre et onze la Cité des sciences et de l'industrie. Au minimum, combien de concurrents étrangers ont visité les quatre sites ?

La « commode » possède quatre « tiroirs », un par site. Une « chaussette » est un concurrent qui n'a pas visité le site du « tiroir » qu'elle occupe. Dans la pire des situations, le « tiroir » de la tour Eiffel contient une « chaussette », le « tiroir » de l'avenue des Champs-Élysées contient deux autres « chaussettes », etc. *Au total, dix « chaussettes » occupent les quatre « tiroirs ». Il reste cinq « chaussettes », c'est la réponse.*
C'est aussi le type de problème que l'on peut poser avec des pourcentages au niveau collège.
Toujours avec quatre quantités, A, B, C et D, majorées par M, la réponse générique est M - {(M-A)+(M-B)+(M-C)+(M-D)} = A+B+C+D-3M tant que la formule donne un nombre positif. Il est facile de *changer* complètement les quantités, leur nombre ou leur nature, pour obtenir un nouveau problème.



Le problème 3 fournit un exemple plus élaboré aux niveaux respectivement collège et lycée. La vraie difficulté est d'**identifier** la « commode », les « tiroirs » et les « chaussettes ». À vous de jouer !

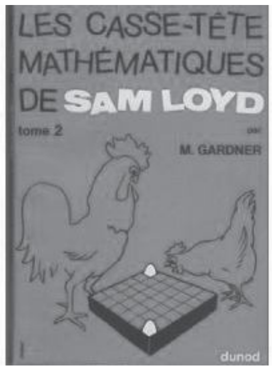
Un problème peut-il en cacher un autre ?

La série de problèmes 4 s'éloigne de l'arithmétique et se rapproche du dénombrement.

Problème 3 (*The Two-Year-College Mathematics Journal*, janvier 1979)

Gaspard Off joue au moins une partie d'échecs par jour. Pendant trente jours d'affilée, il a joué quarante-huit parties. Montrez qu'il existe une période continue de jours pendant laquelle il a joué exactement 11 parties.
(Adaptation d'un problème posé avec des pilules.)

Avec un peu *d'imagination,* on peut passer du disque au carré (sur cinquante et un points à l'intérieur d'un carré de côté 7 cm, il y en a au moins trois dans un disque de rayon 1 cm. Un indice : découpez le grand carré en vingt-cinq petits carrés), évoquer des poignées de mains (à tout instant d'une soirée, il y a au moins deux personnes qui ont donné le même nombre de poignées de mains) ou des anniversaires (à partir de vingt-trois personnes, la probabilité que deux soient nées le même jour est supérieure à 50 %. Un indice : calculez la probabilité complémentaire à 1), changer les pions en dominos (ils ne peuvent pas couvrir un échiquier tronqué de deux cases de la même couleur, par exemple aux deux extrémités d'une diagonale principale).
Quant à elle, la série de problèmes 5 se rapproche de la géométrie.
Toujours avec un peu d'***imagination***, on peut se situer après la Troisième Guerre mondiale (si des pays disparaissent et de nouveaux se créent, alors



Série de problèmes 4

A/ (*Crux Mathematicorum*, novembre 1979) Un anneau a un rayon intérieur de 2 cm et un rayon extérieur de 3 cm. Dans un disque de rayon 16 cm, au minimum, combien de points doit-on choisir au hasard afin que l'on puisse toujours placer l'anneau de façon qu'il couvre au moins dix points ?

B/ Montrez que, dans tout groupe de plusieurs personnes, il y en a au moins deux qui connaissent le même nombre de personnes (qui ont le même nombre d'amis).

C/ Montrez que, si l'on a posé un pion sur chaque case d'un damier 5×5, et si l'on a poussé chacun d'eux vers une case adjacente, alors il y a au moins deux pions sur la même case.

Série de problèmes 5

A/ Montrez que tout polyèdre a au moins deux faces dont le nombre de côtés est le même.
B/ Montrez que, quels que soient cinq points à coordonnées entières d'un plan, il y a au moins un segment reliant deux de ces points qui passe par un point à coordonnées entières.
C/ Montrez que, si un disque fermé (avec son cercle périphérique) contient sept points tels que leurs distances respectives soient au moins égales au rayon du disque, alors le centre du disque fait partie des sept points.

il y aura toujours deux pays qui auront le même nombre de voisins), élargir le plan à l'espace (de cinq à neuf points), tirer des fléchettes (si cinq fléchettes sont plantées dans une cible en forme de triangle équilatéral de côté 20 cm, alors il y en a au moins deux dont la distance est inférieure ou égale à 10 cm. Un indice : découpez le grand triangle en quatre petits triangles).

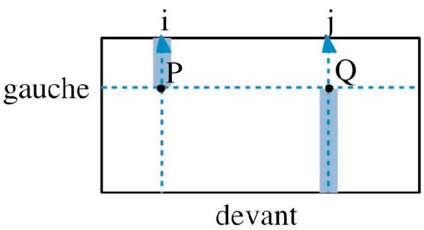
Comment exploiter une première idée ?

Malgré sa simplicité, le principe des tiroirs permet de prouver des résultats non évidents. Le problème 6 fournit un exemple bien connu des militaires.

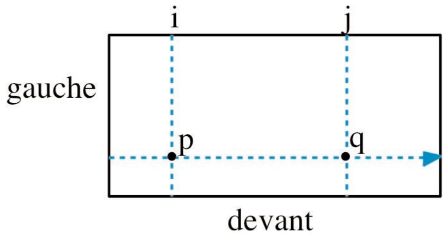
Problèmes 6

Une troupe militaire est rangée en lignes et colonnes complètes. Vu de gauche, ligne après ligne, le chef fait permuter les soldats de façon qu'ils soient rangés de gauche à droite du plus petit au plus grand. Puis, vu de devant, colonne aprés colonne, le chef fait permuter les soldats de façon qu'ils soient rangés de l'avant vers l'arrière du plus petit au plus grand.
Montrez alors que, vu de gauche, chaque ligne est restée rangée de gauche à droite du plus petit au plus grand.

Supposons que cela soit faux : dans une ligne, avec i inférieur à j, il existe un soldat P dans la colonne i plus grand qu'un soldat Q dans la colonne j : P > Q. Tous les soldats derrière P dans la colonne i sont plus grands que lui. Tous les soldats devant Q dans la colonne j sont plus petits que lui.



Retournons dans le temps avant que les colonnes aient été permutées (figure ci-après). S'il y a L lignes, alors le nombre total des soldats précités, y compris P et Q, est L+1. Le principe des tiroirs nous dit que deux de ces soldats étaient dans la même ligne. Un soldat p au moins égal à P est plus petit qu'un soldat q au plus égal à Q : P < Q. D'où une contradiction.



Cette idée peut être exploitée avec une fanfare M × N marchant au pas : afin de l'ordonner dans deux directions perpendiculaires (arrivée et passage du défilé à la tribune officielle), quel est, dans le pire des cas, le nombre minimum de rangées qu'il faut permuter ? Attention : la réponse est seulement majorée par M + N. En particulier, si M ou N = 1, alors la réponse est 1. À vous d'affiner l'idée !

D'une théorie mathématique à l'autre

Si un « tiroir » est un reste obtenu par une division (euclidienne), alors l'arithmétique modulaire fournit des méthodes de résolution puissantes. Tel est le cas du ***théorème chinois*** avec des nombres premiers entre eux. Le problème 7, fréquemment cité pour l'illustrer sous une forme grand public, a été adapté en l'honneur de l'année prochaine (la décomposition de 2014 en facteurs premiers est 2 × 19 × 53).
Le principe des tiroirs est en fait le résultat le plus simple de la *théorie de Ramsey* : quelle doit être la grandeur d'une structure découpée en morceaux afin d'assurer qu'au moins un des morceaux possède une certaine propriété ? Le problème 8, sous une forme également grand public, revient à trouver le nombre de Ramsey R(3,3).
Le résultat peut s'exprimer autrement : parmi R(3, 3) personnes, il y en a toujours trois qui se connaissent toutes entre elles ou qui ne se connaissent pas du tout.
Combien de points au minimum faut-il joindre dans le plan afin d'assurer, quelle que soit la coloration en rouge ou en vert de tous les segments (de droite) les reliant, l'existence d'au moins un triangle d'une seule couleur ?

On devine qu'il faut essayer avec six points.
Il y a quinze segments, dont au moins huit sont de la même couleur.
Prenons au hasard un point A.
Le principe des tiroirs nous dit qu'au moins trois des cinq segments qui aboutissent en A sont de la même couleur, disons bleu.

Faciliter la lecture

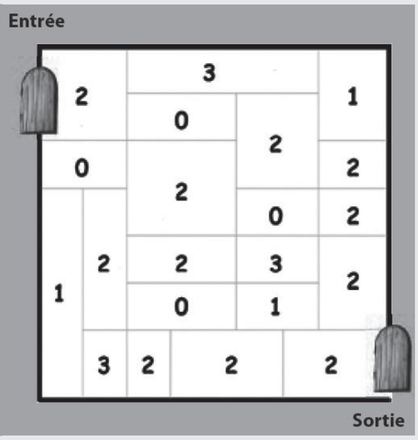
Les pistes suivantes proviennent des expérimentations et des résultats de la compétition Mathématiques sans frontières junior. Lors de la création des problèmes, l'équipe de conception réalise des tests sur les élèves pour voir comment ils réagissent à une formulation très précise et l'énoncé est modifié tant que l'équipe n'est pas persuadée qu'un grand nombre d'élèves sera capable « d'entrer dans le problème » à la première ou à la seconde lecture.
Les deux questions a avoir toujours en mémoire lorsqu'on crée un problème sont :
• sur quoi l'élève va-t-il travailler ? (au sens de quelle tâche va mobiliser son cerveau ?) ;
• est-ce bien cela que l'on souhaite lui faire faire ? Si la réponse à cette seconde question est « non », il faut changer l'énoncé.

Voici donc quelques pistes de réflexion :
• Être attentif à la présentation :
– différentes consignes mises l'une sous l'autre pour les distinguer ;
– texte utilisant des phrases courtes et un vocabulaire simple.
• Choisir un habillage réaliste qui fait sens.
• Proposer un exemple, en général plus simple, peut se prêter à certains problèmes, à condition toute fois qu'il ne « tue » pas le problème. Il doit être utilisé uniquement pour être efficace sinon cela devient un distracteur.
• Avoir une illustration efficace est l'occasion de revenir sur une partie de l'énoncé qui peut être difficile à comprendre. On peut même l'imaginer comme faisant intégralement partie de l'énoncé et supprimer le passage qu'elle remplace.
• Mettre la question en évidence, par exemple la mettre en premier. L'élève entre alors dans l'exercice en sachant déjà ce qui est attendu, sa lecture n'est d'emblée pas la même.
• Lorsque l'on devine que les consignes deviennent trop nombreuses et qu'elles risquent d'être, pour certaines, oubliées lors du traitement du problème, on utilise des mots qui préparent l'élève à être à nouveau attentif. « Attention » en est le meilleur exemple. Bien évidemment il ne faut pas le faire suivre d'une dizaine de conditions.

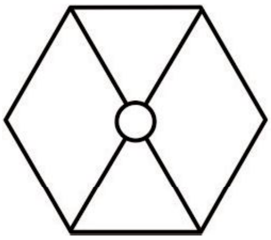
Audrey Candeloro

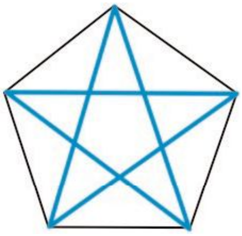
Dans l'exemple ci-dessous, la difficulté (inutile) des mots employés a empêché une grande partie des élèves de comprendre l'énoncé.

« Le gnome Clésemi doit traverser ce souterrain pour atteindre le trésor de Smaug le dragon. Il dispose pour cela d'un plan (voir schéma ci-contre). Malheureusement, ce plan n'indique pas où se trouvent les portes, mais seulement le nombre de portes qu'il y a dans chaque pièce.
Aide Clésemi en lui indiquant sur le plan toutes les portes et le chemin à suivre. »



Supposons que ce sont [AB], [AC] et [AD]. Si [BC], [BD] ou [CD] est bleu, alors il existe un triangle bleu.
Sinon, le triangle formé par ces trois segments est rouge. $R(3,3) \leq 6$. La figure montre que l'on ne peut pas remplacer 6 par 5, donc que $R(3,3) = 6$.





Une dernière remarque vise à alimenter la réflexion du lecteur pendant quelque temps encore. Afin de remplir une grille classique de *Sudoku*, on cherche d'abord les possibilités évidentes pour placer un chiffre, puis les jumeaux ou triplés qui forcent un autre candidat dans une case de la même zone, *etc.* Sauriez-vous montrer que le principe des tiroirs permet de résoudre tout problème de Sudoku ? Un indice : formalisez le problème de façon équivalente par la coloration de la totalité des quatre-vingt-un sommets d'un graphe. Deux sommets sont reliés par une arête si, et seulement si, ils appartiennent à la même ligne, colonne ou région. On vous donne neuf couleurs et un début de coloriage. Deux sommets reliés par une arête doivent être de couleurs différentes. Laissez libre cours à votre imagination !

J.-L. L.

Problème 7 (adaptation)

Une bande de cinquante-trois pirates possède un trésor constitué de plus de mille cinq cents pièces d'or identiques. Ils projettent de se les partager également, et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors trois pièces. Mais les pirates se querellent, et trente-quatre d'entre eux sont tués. Un nouveau partage donnerait au cuisinier deux pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls le trésor, deux pirates et le cuisinier sont sauvés, et le partage donnerait alors une pièce d'or à ce dernier. Quelle est la fortune minimale que peut espérer le cuisinier s'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?