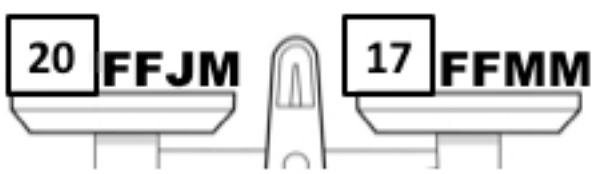
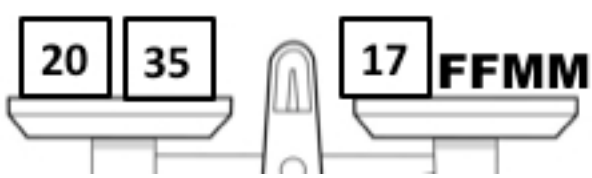
Tangente Éducation 41

Réponses des problèmes du « rallye des rallyes »

La balance

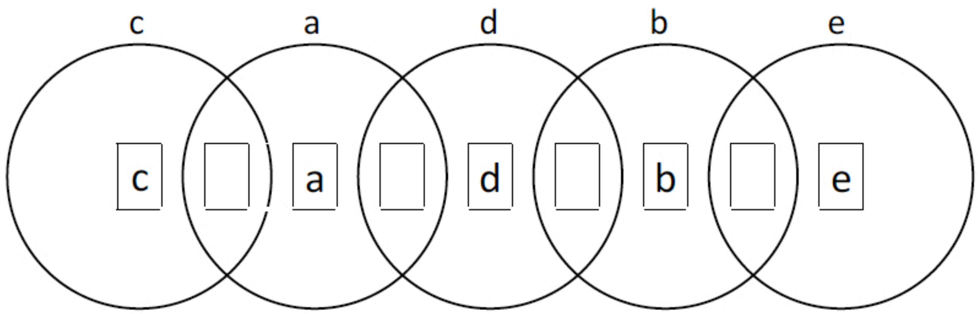
On ajoute FFM sur chacun des deux plateaux de la balance, puis on remplace (à gauche) FFJM par 35 grammes.





On en déduit que FFMM pèse 20 + 35 – 17, soir 38 grammes, d'où **F + M = 19 grammes.**

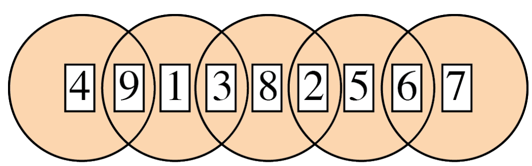
Les nombres encerclés

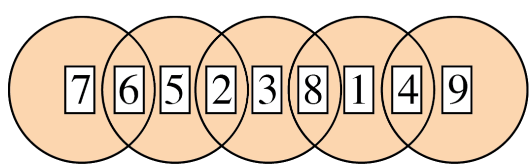


Soit S la somme constante. La somme des entiers de 1 à 9 vaut 45.
On a $3S + a + b = 45$ donc $S \leq 14$, et $2S + c + d + e = 45$ donc $S \geq 11$.
Si $S = 11$, $c + d + e = 23$ donc c, d, e sont égaux à 6, 8, 9.
• $d \neq 9$ car il ne pourrait pas être complété à 11, $e = 9$ avec 2 ;
• $d \neq 8$ car il ne pourrait pas être complété à 11, $d = 6$ et $c = 8$ avec 3 ;
• 7 n'est pas avec 2 ni 6, $a = 7$ et $b = 12 - a = 5$.
On termine par 1 et 4, mais le nombre n'est pas divisible par 13.

Si $S = 12$, $c + d + e = 21$ donc c, d, e sont égaux à 4, 8, 9 ou 5, 7, 9 ou 6, 7, 8.
Le 1er cas est écarté car ni 4 ni 8 ne peuvent être à une extrémité.
Le 2e cas est écarté car ni 5 ni 7 ne peuvent être à une extrémité.
$d = 6$ ne peut pas être à une extrémité, $c = 7$ avec 5 et $e = 8$ avec 4, mais 9 ne peut pas être placé.

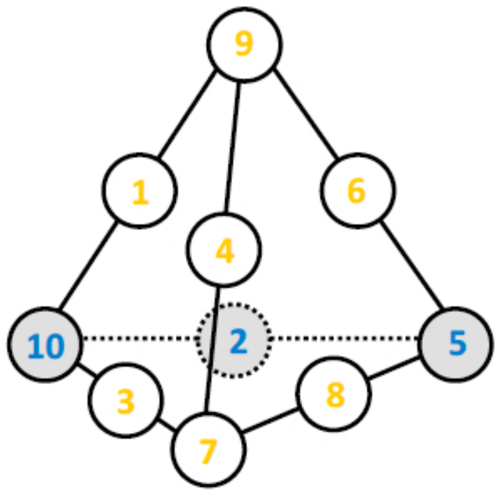
Si $S = 13$, $c + d + e = 19$ et $a + b = 6$ donc a, b sont égaux à 1, 5 ou 2, 4.
Si c, d, e sont égaux à 2, 8, 9, ni 2 ni 8 ne peuvent être à une extrémité.
• Si c, d, e sont égaux à 3, 7, 9, $d = 3$, $a \neq 1$, … on obtient une première réponse.
• Si c, d, e sont égaux à 4, 6, 9, ni 4 ni 9 ne peuvent être à une extrémité.
• Si c, d, e sont égaux à 4, 7, 8, $d = 8$, … on obtient la seconde réponse.
• Si c, d, e sont égaux à 5, 6, 8, ni 5 ni 8 ne peuvent être à une extrémité.



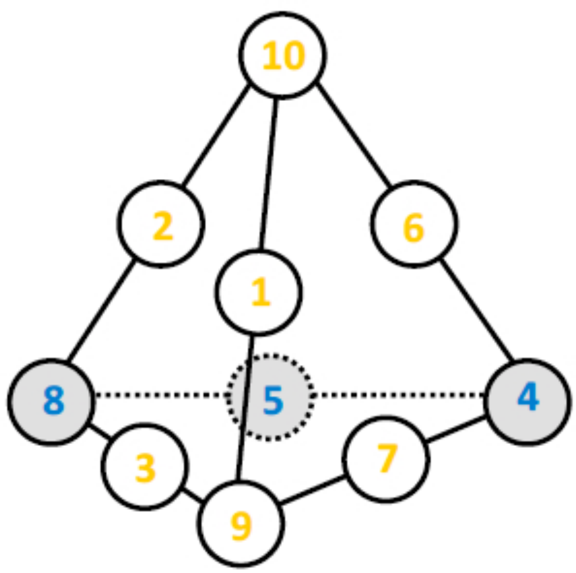


Le tétraèdre numéroté

Soient S la somme des nombres des 4 sommets et M celle des 6 milieux d'arêtes.
S + M est la somme des entiers de 1 à 10, soit 55.
3S + M est la somme des nombres des arêtes, $(5 \times 20) + (1 \times 17) = 117$
S = 31 et M = 24.vLes sommets sont 10-8-7-6, 10-9-7-5vou 10-9-8-4.
Si les sommets valant 10 ; 8 ; 7 ; 6, 7 et 6 sont aux extrémités de l'arête de somme 17 (sinon, on aurait deux fois 7). Ils sont complétés par 4, que l'on trouve aussi entre 10 et 6.
Si les sommets sont 10 ; 9 ; 7 ; 5, 10 et 5 sont aux extrémités de l'arête de somme 17 (sinon, on aurait deux fois 5). Ils sont complétés par 2, d'où une 1ère réponse, **100**, car on peut terminer.



Si les sommets sont 10 ; 9 ; 8 ; 4, 8 et 4 sont aux extrémités de l'arête de somme 17 (sinon, on aurait deux fois 8). Ils sont complétés par 5, d'où la 2e réponse, **160**, car on peut terminer.



Les fractions unitaires

On cherche $a < b$ tel que $(1 / a) + (1 / b) = (4 / 2017) - (1 / 7120010)$.
$2 \times 5 \times 353\ (a + b) = 7\ ab$ (1).
Si a et b sont divisibles par 353, $a = 353\ a'$ et $b = 353$ b' (avec $a' < b'$).
(1) devient $2 \times 5\ (a' + b') = 7\ a'b'$.
$2 - a' = 4(b' - 5)/(25 + 7(b' - 5))$ vaut -3, $-8/11$, $-2/9$, 0 puis tend vers 4/7.
$b' = 5$ et $a' = 2$, d'où une première réponse $353 \times 2 =$ **706**.
$4 / 2017 - 1 / 7120010 = 14119 / 7120010 = 7 / (2\times5\times353) = (5 + 2)/(2\times5\times353)$
$= 1 / (2\times353) + 1 / (5\times353) = 1 / 706 + 1 / 1765$.
Si seul a est divisible par 353, $a = 353a'$.
(1) devient $2 \times 5\ (353a' + b) = 7\ a'b$ qui donne $a' = 304 + 353a''$.
$2 \times 5\ (304 + 353a'') = (7a'' + 6)b$.
D'où une contradiction car $b \geq 22\times5\times353 / 7 > 1008$.
Si seul b est divisible par 353, (1) devient $(7b'' + 6)a = 10(304 + 353b'')$.
$505 - a = 5(b'' - 2) / (20 + 7(b'' - 2))$ vaut $-5/3$, $-5/13$, 0 puis tend vers 5/7.
$b'' = 2$ et $a = 505$, d'où la seconde réponse **505**.
$4 / 2017 - 1 / 7120010 = 14119 / 7120010 = 7 / (2\times5\times353) = 707 / (2\times5\times101\times353)$
$= (706 + 1) / (2\times5\times101\times353) = 1 / (5\times101) + 1 / (2\times5\times101\times353) = 1 / 505 + 1 / 356530$.