par Michèle Artigue

Le rôle de l'erreur en mathématiques

L'erreur en mathématiques, qu'elle soit individuelle ou collective, est un phénomène plus banal que ne le laisse supposer la vision de cette discipline, exemple de rigueur et d'exactitude, portée par la culture commune. Et, comme le montre bien l'histoire des mathématiques, elle peut être aussi étonnamment productive.

Michèle Artigue est professeur des universités (Paris VII, Laboratoire DIDIREM) et présidente de l'International Commisssion on Mathematical Instruction (ICMI).

Pour les enseignants, l'erreur a d'abord valeur de symptôme, elle est le signe que quelque chose n'a pas été compris, que l'apprentissage visé n'a pas encore abouti. Elle est souvent attendue mais parfois surprenante ; elle est souvent aussi désespérément récurrente, provoquant un sentiment d'impuissance.

Les didacticiens, depuis le début, se sont intéressés à cette question de l'erreur et ils l'ont approchée de diverses manières, balayant les domaines mathématiques et les niveaux d'enseignement, établissant des typologies d'erreurs, contribuant à la rendre intelligible en en décortiquant les mécanismes de production. Personnellement, comme enseignante, ces travaux m'ont été utiles et, sans prétendre à une quelconque exhaustivité, je voudrais exprimer, en les illustrant par des exemples, quelques-uns des acquis de la recherche didactique qui m'ont marquée dans ce domaine.

L'erreur comme expression de connaissance

Quand j'ai commencé à enseigner, je voyais l'erreur de façon purement négative : c'était la marque d'une absence de connaissance ou d'une faute de raisonnement, d'un défaut de rigueur. Ce n'était pas un objet sur lequel on pouvait travailler et construire, mais quelque chose qu'il fallait éradiquer au plus vite, en remplaçant l'erroné par le correct. Mes premiers contacts avec les travaux de Guy Brousseau (Brousseau, 1983) m'ont amenée à réviser rapidement cette position. Adaptant au champ didactique les travaux de l'épistémologue Gaston Bachelard et notamment la notion d'obstacle épistémologique, il soutenait en effet que les erreurs, notamment celles particulièrement résistantes, n'étaient pas l'expression d'une absence de connaissances mais au contraire celle de connaissances qui, pour l'élève, avaient fait dans un certain contexte la preuve de leur efficacité et que la pratique dans ce contexte avait renforcées. Il déduisait de ces caractéristiques que pour s'attaquer efficacement à de telles erreurs, il ne suffisait pas de présenter la connaissance ou procédure correcte, il fallait à travers des situations adéquates travailler sur ces erreurs, déconstruire pour pouvoir reconstruire. Même avec de telles stratégies, l'erreur pouvait néanmoins resurgir régulièrement mais elle serait de mieux en mieux contrôlée. Ainsi était-il normal que, dans l'extension du champ des nombres à partir des entiers, les élèves tendent à étendre les propriétés, les modes de raisonnement et de contrôle qui s'étaient révélées efficaces avec ces derniers. Il était aussi normal de penser que, plus tard, leur expérience culturelle des limites, le sens commun de ce terme, entrerait en conflit avec la notion mathématique de limite quand celle-ci serait introduite, pour ne citer que deux exemples parmi tant d'autres possibles.

Le rôle des choix didactiques

Ce qu'a aussi bien mis en évidence la recherche didactique, c'est que les choix d'enseignement usuels, dans certains cas, renforçaient la résistance des obstacles épistémologiques identifiés. C'était en particulier le cas à l'époque pour l'enseignement des décimaux qui s'appuyait essentiellement sur une vision de ces derniers comme entiers à un changement d'unité près. Une recherche comme celle de Leonard et Sackur (1991) avait par exemple montré que les conceptions erronées les plus fréquemment observées permettaient d'obtenir plus de 80% de réussite à l'ensemble des exercices proposés par les manuels de l'époque.

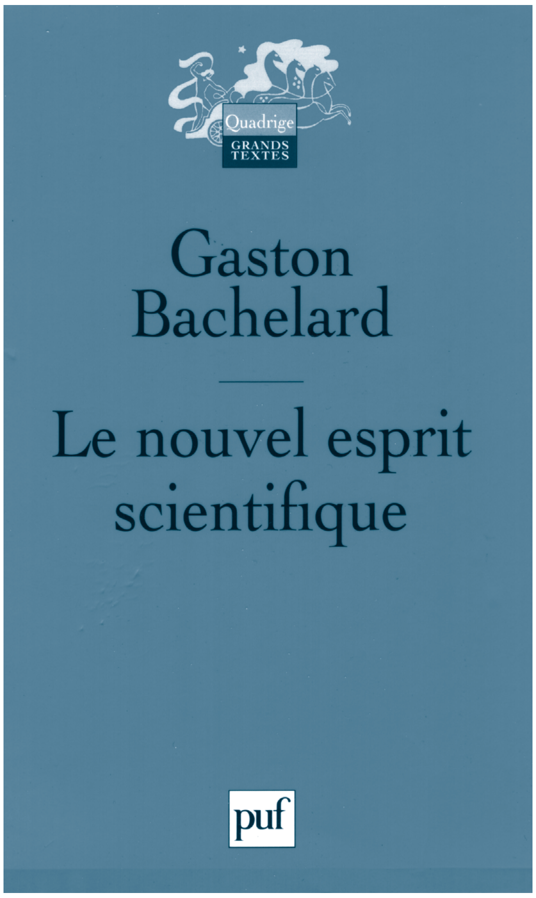
Au-delà de ce renforcement possible des obstacles épistémologiques par des choix didactiques, ce qui est ici plus profondément en jeu c'est que, dans la plupart des cas, ce qui peut être enseigné, ce qui est enseigné, doit être nécessairement partiellement reconstruit, remanié au fur et à mesure de la progression de l'enseignement. Pour entrer dans la pensée algébrique, il faut s'appuyer sur des connaissances arithmétiques mais il faut aussi modifier le rapport au signe d'égalité, aux lettres, les modes de raisonnement. Et il en est de même quand on passe de l'algèbre à l'analyse.

De nombreux travaux ont par exemple été consacrés à des erreurs comme : $3x + 5y = 8xy$ ou $2x + x^2 = 2x^3$, fréquentes chez les débutants en algèbre mais qui résistent malheureusement pour certains élèves au-delà des premiers contacts avec le monde algébrique. On comprend mieux ces erreurs et on peut agir plus efficacement sur elles si on y voit le désir de l'élève de satisfaire des règles implicitement attachées pour lui au calcul arithmétique depuis l'école élémentaire : un calcul terminé est un calcul qui ne porte plus la trace d'opérations. Ce n'est plus le cas en algèbre où les formes de terminaison du calcul sont beaucoup plus ouvertes mais, pour l'élève, les repères arithmétiques perdurent.

L'implicite et l'explicite, le contrat didactique

Un autre apport de cette approche didactique des erreurs est pour moi l'attention qu'elle m'a amenée à apporter au fait que, dans la communication didactique, ce qui est clairement explicité n'est que la partie émergée de l'iceberg. La culture mathématique, comme toute culture, se transmet aussi de façon implicite par le geste, l'exemple, les façons de faire, les modes d'expression donnés à voir et imités, les règles largement tacites auxquelles les acteurs s'assujettissent. L'exemple ci-dessus en est une illustration.

Mais, en matière d'erreurs, c'est sur les effets des règles implicites du contrat didactique que s'est d'abord focalisée la littérature. L'exemple des problèmes du type « âge du capitaine » initialement travaillés à l'IREM de Grenoble et popularisés dans le grand public en France par Stella



« Le nouvel esprit scientifique » est l'oeuvre maîtresse du philosophe français des sciences Gaston Bachelard (1884 - 1962).
Pour Gaston Bachelard, l'erreur est le moteur du progrès scientifique. « En revenant sur un passé d'erreurs, on trouve la vérité ».

Baruk en est le plus connu. Les travaux menés pendant plus de dix ans par Lieven Verschaffel et ses collègues (Verschaffel, Greer, De Corte, 2000) éclairent ce type d'erreur d'un jour nouveau. Ils montrent bien en effet que ce qui est en anglais dénommé « word problem » joue un rôle fondamental dans les apprentissages de l'école élémentaire mais y est assujetti à deux types de contrats didactiques distincts correspondant à deux fonctionnalités différentes remplies par ces problèmes. Une des fonctionnalités est de contribuer au sens des opérations en permettant d'associer un ensemble de situations prototypiques à chacune d'elles. Le contexte joue ici à un niveau métaphorique et la règle implicite du contrat est que l'élève fasse les associations requises sans trop s'interroger sur le réalisme de la situation, ni de la solution proposée. Une autre fonctionnalité est de permettre aux mathématiques de l'école élémentaire de devenir utiles pour chercher à résoudre des problèmes non scolaires via leur modélisation mathématique. Dans ce cas, contrairement au précédent, le contexte n'est en rien un habillage, il doit être pris au sérieux à la fois en ce qui concerne les choix de modélisation et l'examen des solutions obtenues. Les chercheurs mettent l'accent sur les injonctions paradoxales qui en résultent et les tensions au niveau du contrat didactique, des tensions qui restent au niveau des implicites de ce dernier.

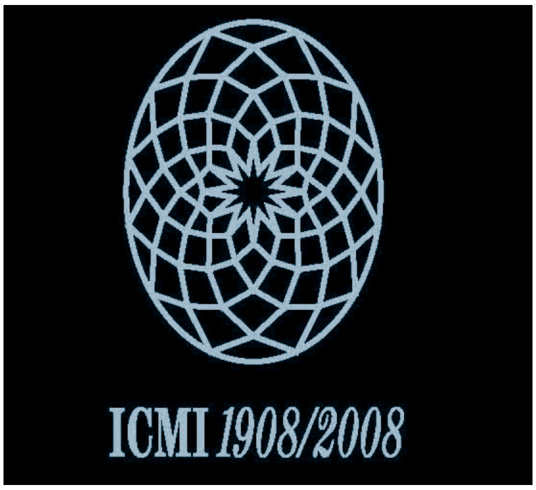
Logique et erreurs

Une autre dimension sur laquelle la recherche didactique a questionné certaines idées communes est celle des rapports entre logique et erreur. Parce que les erreurs se traduisent souvent en mathématiques par des erreurs logiques de raisonnement, on a pu penser qu'un enseignement explicite des règles de cette logique pourrait aider à les prévenir. Des recherches comme celles initiées par Viviane Durand-Guerrier (1996) ont bien montré que la situation était plus complexe et ont aidé à comprendre pourquoi. Mettant en évidence et analysant les raisons de différences importantes de réussite dans l'évaluation d'énoncés ayant la même structure logique suivant que le domaine était plus ou moins familier aux élèves, ces recherches ont montré l'étroite imbrication qui existe entre le sens et la logique, la sémantique et la syntaxe, dans les raisonnements mathématiques. Elles ont montré aussi que même des professionnels ne détectent pas aisément une erreur de logique dans un raisonnement un tant soit peu complexe, que très souvent ce qui leur permet de penser qu'il y a erreur c'est que le résultat obtenu va à l'encontre de ce qui est connu pour vrai par ailleurs ou par trop invraisemblable. La palette des exemples et contre-exemples disponibles, les connexions que l'on est capable de faire avec des résultats du même domaine ou d'autres domaines sont ici essentielles. Il est normal qu'un élève de lycée pense que si une fonction continue f a un minimum en a, il existe un intervalle centré en a telle que f soit décroissante à gauche de a et croissante à droite de a sur cet intervalle. Rien dans les exemples de fonctions qu'il a rencontrés ne peut le conduire à mettre en doute une telle conjecture. Mais je dois avouer que chaque année mes étudiants de CAPES en sont tout autant persuadés, comme ils sont persuadés du fait que si une fonction dérivable a une limite finie en l'infini, sa dérivée, elle, tend nécessairement vers 0. Mais le travail sur ces convictions erronées se révèle ensuite avec eux très productif pour retravailler ces notions familières mais toujours largement inconnues que sont les fonctions d'une variable réelle.

Bien sûr, les erreurs de raisonnement auxquelles a à faire face un enseignant du secondaire sont bien plus élémentaires, et ses préoccupations sont plus liées à des mélanges entre hypothèses et conclusions, des confusions entre un théorème et sa réciproque, des contre-exemples considérés comme des exceptions qui confirment la règle. Dans ce domaine aussi, je pense, la recherche didactique a beaucoup apporté depuis les travaux pionniers de Nicolas Balacheff, mettant par exemple en évidence les discontinuités existantes entre argumentation et démonstration, les décalages entre logique quotidienne et logique mathématique, et les erreurs que ces discontinuités et décalages induisent. Je renvoie le lecteur intéressé au site de la lettre de la preuve qui, depuis plus de dix ans, est un forum international d'échanges pour ceux intéressés par ces questions (*www-didactique.imag.fr/preuve*) ainsi qu'aux divers articles sur le sujet publiés dans la revue Petit x.

Ces quelques réflexions personnelles ne font que survoler la question des erreurs. Si je voulais résumer, je dirais que ce qui me paraît aujourd'hui important en tant qu'enseignante c'est de ne pas considérer les erreurs des élèves comme des objets isolés, de simples manques mais d'essayer de restituer la cohérence qui leur est sous-jacente, de la comprendre et de penser en fonction de cette compréhension les moyens d'action ; c'est d'aider les élèves à développer des modes de contrôle diversifiés de leur travail ; c'est aussi d'apprendre à évaluer le potentiel d'occasions d'apprentissage que recèlent les erreurs qu'ils font et d'essayer de les exploiter au mieux ; c'est enfin de m'interroger réflexivement sur la façon dont je gère les erreurs de mes étudiants et les effets possibles, productifs et contre-productifs de cette gestion.

M. A.



L'International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) a été créée lors du IV^e Congrès international des mathématiciens (Rome 1908).
Cette organisation réunit aujourd'hui 81 pays.

Références :

Brousseau, G. (1983) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4/2, 77-111.

Durand-Guerrier, V. (1996) *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication.* Thèse de doctorat de l'Université Claude Bernard (Lyon).

Léonard, F., Sackur, C. (1990). Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2-3, 205-240.

Verschaffel, L, Greer, B, De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems. Swets and Zeitlinger, Lisse (Pays-Bas), 203 pages.*